ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ MINH QUYẾT

PHƯƠNG PHÁP HÀM PHẠT MINIMAX CHÍNH XÁC CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG TRƠN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2017

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

TÔ MINH QUYẾT

PHƯƠNG PHÁP HÀM PHẠT MINIMAX CHÍNH XÁC CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU KHÔNG TRƠN

Chuyên ngành: TOÁN ỨNG DỤNG

Mã số: 60.46.01.12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS. TS. ĐỖ VĂN LƯU

Thái Nguyên - 2017

Mục lục

Lời cảm ơn

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy tôi PGS.TS. Đỗ Văn Lưu, người đã trực tiếp hướng dẫn luận văn, đã tận tình chỉ bảo và hướng dẫn tôi tìm ra hướng nghiên cứu, tìm kiếm tài liệu, giải quyết vấn đề,... nhờ đó tôi mới có thể hoàn thành luận văn cao học của mình. Từ tận đáy lòng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc nhất tới Thầy của tôi và tôi sẽ cố gắng hơn nữa để xứng đáng với công lao của Thầy.

Tôi xin chân thành cảm ơn Ban giám hiệu, phòng Đào tạo trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã quan tâm và giúp đỡ tôi trong suốt thời gian học tập tại trường. Tôi xin cảm ơn quý thầy cô Khoa Toán - Tin và đặc biệt là PGS.TS. Nguyễn Thị Thu Thủy, trưởng Khoa Toán - Tin, đã luôn quan tâm, động viên, trao đổi và đóng góp những ý kiến quý báu trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận văn.

Cuối cùng, tôi muốn bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới những người thân trong gia đình, đặc biệt là bố mẹ. Những người luôn động viên, chia sẻ mọi khó khăn cùng tôi trong suốt thời gian qua và đặc biệt là trong thời gian tôi theo học khóa thạc sỹ tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, ngày 24 tháng 4 năm 2017

Tác giả luận văn

Tô Minh Quyết

Bảng ký hiệu

$\mathbb{R}$	trường số thực
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n-chiều
$\mathbb{R}^m_+$	orthant không âm của $\mathbb{R}^m$
T	chuyển vị của véc - tơ
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
B	là hình cầu đơn vị mở trong $\mathbb{R}^n$
$\partial f_i(x)$	dưới vi phân của hàm lồi f_i tại x
$\wedge$	và
$\vee$	hoặc
$I(\bar{x})$	tập các chỉ số ràng buộc tích cực
g_i^+	bằng 0 nếu $g_i(x) \leq 0$, bằng $g_i(x)$ nếu $g_i(x) > 0$
$L(x, \mu, \nu)$	hàm Lagrange
$P_\infty(x, c)$	hàm phạt minimax chính xác
$(P_\infty(c))$	bài toán tối ưu phạt
$VP_\infty(x, c)$	hàm phạt minimax chính xác véc - tơ
$(VP_\infty(c))$	bài toán tối ưu véc - tơ phạt

Mở đầu

Phương pháp hàm phạt chính xác cho phép đưa một bài toán tối ưu phi tuyến có ràng buộc về một bài toán tối ưu không có ràng buộc sao cho nghiệm của bài toán tối ưu phạt cũng là nghiệm của bài toán tối ưu có ràng buộc ban đầu. Antczak ([2], 2013) đã nghiên cứu mối quan hệ giữa nghiệm của bài toán tối ưu vô hướng có ràng buộc và nghiệm của bài toán tối ưu không có ràng buộc với hàm mục tiêu là một hàm phạt minimax chính xác và chỉ ra cận dưới của tham số phạt để hai bài toán đó tương đương. Jayswall - Choudhury ([7], 2016) đã thiết lập các định lí điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu véc - tơ có ràng buộc bằng phương pháp hàm phạt minimax chính xác và xác định các điều kiện để bài toán tối ưu véc - tơ có ràng buộc tương đương với bài toán không có ràng buộc bằng phương pháp hàm phạt minimax chính xác. Đây là đề tài nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Chính vì vậy, tôi chọn đề tài: "Phương pháp hàm phạt minimax chính xác cho bài toán tối ưu không trơn".

Mục đích của luận văn trình bày phương pháp hàm phạt minimax chính xác và các định lí điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu của T. Antczak (đăng trong Tạp chí J. Optim. Theory Appl. 159 (2013), 437 - 453) và cho bài toán tối ưu véc - tơ của A. Jayswal - S. Choudhury (đăng trong Tạp chí J. Optim. Theory Appl. 169 (2016), 179 - 199) có ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức.

Bố cục luận văn gồm phần mở đầu, hai chương trình bày nội dung của luận văn, phần kết luận và danh mục tài liệu tham khảo.

Chương 1: "Cận dưới của tham số phạt của phương pháp hàm phạt minimax chính xác cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu không khả vi" trình bày các kết quả của Antczak [2] về phương pháp hàm phạt minimax chính xác, và sự tương đương của bài toán tối ưu có ràng buộc và bài toán tối ưu không có ràng buộc phạt được chứng minh khi tham số phạt lớn hơn một giá trị cận dưới.

Chương 2: "Phương pháp hàm phạt minimax chính xác và định lí điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu véc - tơ lồi không trơn" trình bày các kết quả của Jayswal - Choudhury [7], phương pháp hàm phạt minimax chính xác và các định lí điểm yên ngựa cho bài toán tối ưu véc - tơ lồi không trơn với các hàm Lipschitz địa phương.

Chương 1

Cận dưới của tham số phạt của phương pháp hàm phạt minimax chính xác cho bài toán tối ưu đơn mục tiêu không khả vi

Chương này trình bày phương pháp hàm phạt minimax chính xác và sự tương đương của bài toán tối ưu có ràng buộc và bài toán tối ưu phạt không có ràng buộc. Các kết quả trình bày trong chương này là của T. Antczak [2].

1.1 Các khái niệm và kết quả liên quan

Hàm $f : X \to \mathbb{R}$ xác định trên tập lồi $X \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là lồi nếu với $\forall z, x \in \mathbb{R}$ và $\lambda \in [0, 1]$, ta có

$$f(\lambda z + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(z) + (1 - \lambda)f(x).$$

Định nghĩa 1.1.1 Dưới vi phân của hàm lồi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tại $x \in \mathbb{R}^n$ được xác định như sau:

$$\partial f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : f(z) - f(x) \geq \xi^T(z - x), \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Định nghĩa 1.1.2 Trên vi phân của hàm lõm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tại $x \in \mathbb{R}^n$ được xác định như sau:

$$\partial f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : f(z) - f(x) \leq \xi^T(z - x), \forall z \in \mathbb{R}^n\}.$$

Nhận xét 1.1.3 Từ định nghĩa của hàm lồi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tại x, suy ra:

$$f(z) - f(x) \geq \xi^T(z - x), \quad \forall \xi \in \partial f(x), \tag{1.1}$$

đúng với $\forall z \in \mathbb{R}^n$, trong đó $\partial f(x)$ kí hiệu dưới vi phân của f tại x. Tương tự, với hàm lõm $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tại x, ta có bất đẳng thức:

$$f(z) - f(x) \leq \xi^T(z - x), \quad \forall \xi \in \partial f(x), \tag{1.2}$$

đúng với $\forall z \in \mathbb{R}^n$.

Trước khi chứng minh kết quả chính cho bài toán (P), ta cần bổ đề sau đây:

Bổ đề 1.1.4 *Giả sử $\varphi_k, k = 1, ..., p$, là hàm giá trị thực xác định trên $X \subset \mathbb{R}^n$. Với $x \in X$, ta có*

$$\max_{1 \leq k \leq p} \varphi_k(x) = \max_{\alpha \in \Omega} \sum_{k=1}^{p} \alpha_k \varphi_k(x),$$

trong đó $\Omega := \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p_+ : \sum_{k=1}^{p} \alpha_k = 1\}$.

Bài toán cực trị đã xét ở đây là bài toán tối ưu phi tuyến tổng quát có ràng buộc đẳng thức và bất đẳng thức:

$$(P) \;\; \min f(x), \;\; x \in D = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i \in I, h_j(x) = 0, j \in J\},$$

trong đó $I = \{1, ..., m\}, J = \{1, ..., s\}, f : X \to \mathbb{R}$ và $g_i : X \to \mathbb{R}$, $i \in I, h_j : X \to \mathbb{R}, j \in J$ là các hàm Lipschitz địa phương trên tập khác rỗng $X \in \mathbb{R}^n$ và D là tập chấp nhận được của bài toán (P).

Để đơn giản ta sẽ đưa vào một số kí hiệu: $g := (g_1, ..., g_m) : X \to \mathbb{R}^m$ và $h := (h_1, ..., h_s) : X \to \mathbb{R}^s$.

Hơn nữa, ta kí hiệu tập các chỉ số ràng buộc bất đẳng thức tích cực tại $x \in D$

$$I(\bar{x}) := \{i \in I : g_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Định lý 1.1.5 [9] *Giả sử $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán (P) và một điều kiện chính quy thích hợp thỏa mãn tại $\bar{x}$. Khi đó tồn tại các nhận tử Lagrange $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ và $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^s$ sao cho*

$$0 \in \partial f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i \partial g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{s} \bar{\mu}_i \partial h_j(\bar{x}), \tag{1.3}$$

$$\bar{\lambda}_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i \in I, \tag{1.4}$$

$$\bar{\lambda} \geq 0. \tag{1.5}$$

Định nghĩa 1.1.6 Điểm $\bar{x} \in D$ được gọi là điểm Karush-Kuhn-Tucker trong bài toán (P) nếu tồn tại nhân tử Lagrange $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ và $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^s$ sao cho điều kiện cần tối ưu Karush-Kuhn-Tucker $(1.3) - (1.5)$ đúng.

1.2 Phương pháp hàm phạt minimax chính xác

Năm 1978 Charalambous [4] đưa vào một lớp các hàm phạt chính xác không khả vi như sau:

$$P_p(x, \alpha, \beta, c) := f(x) + c\left(\sum_{i=1}^{m} [\alpha_i g_i^+(x)]^p + \sum_{j=1}^{s} [\beta_j |h_j^+(x)|]^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

trong đó c là tham số phạt, $p \geq 1, \alpha_i > 0, i = 1, ..., m, \beta_j > 0, j = 1, ..., s$. Với một ràng buộc bất đẳng thức $g_i(x) \leq 0$, hàm $g_i^+(x)$ được định nghĩa bởi

$$g_i^+(x) := \begin{cases} 0, & g_i(x) \leq 0, \\ g_i(x), & g_i(x) > 0. \end{cases} \tag{1.6}$$

là bằng 0 với mọi x thỏa mãn ràng buộc và có giá trị dương khi ràng buộc này bị vi phạm. Hơn nữa, sự vi phạm lớn ở $g_i(x) \leq 0$ đạt giá trị $g_i^+(x)$. Như vậy hàm $g_i^+(x)$ có được điểm phạt liên quan với ràng buộc $g_i(x) \leq 0$.

Với $p = 1$ và xét các tham số $\alpha_i, i = 1, ..., m, \beta_j, j = 1, ..., s$ bằng 1, ta nhận được hàm phạt chính xác không khả vi được gọi là hàm phạt chính xác l_1 (ta cũng gọi là hàm phạt giá trị tuyệt đối). Phương pháp hàm phạt chính xác l_1 đã được đưa vào bởi Pietrzykowski [8]. Đa số các tài liệu về phương pháp hàm phạt chính xác không khả vi nghiên cứu các điều kiện đảm bảo nghiệm tối ưu của bài toán có ràng buộc đã cho cũng là cực tiểu địa phương của bài toán với hàm phạt chính xác không có ràng buộc.